



# Comité National Tunisien Pour les Olympiades Mathématiques

TEST NATIONAL (Pré-Selection) - 27 MARS 2021

9:00 – 12:30

- ESSAYEZ D'ÊTRE LE PLUS CLAIR POSSIBLE DANS VOS RÉPONSES ET MÉTHODES.

**Exercice 1:** Etant donné un ensemble de réels non nuls  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , on suppose que la somme de leurs produits deux à deux est égale à 1 ( $\sum_{i < j} a_i a_j = 1$ ). Montrer qu'il est possible d'éliminer un seul nombre ( $a_i$ ) de la somme de sorte que la somme des nombres restants ( $S - a_i$ ) soit inférieure à  $\sqrt{2}$ .

**Exercice 2:**

L'écriture des nombres  $1, 2, \dots, n$  dans un ordre donné est appelée permutation de  $(1, \dots, n)$ . Par exemple,  $(2, 5, 3, 1, 4)$  est une permutation de  $(1, 2, 3, 4, 5)$ .

(a) Une permutation est dite *carrée* si pour tout entier  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $a_i a_{i+1} + 1$  est un carré parfait. Montrer que pour un choix infini d'entiers  $n$ , il existe une permutation carrée de  $(1, 2, \dots, n)$  (Donner une construction).

(b) Une permutation est dite *cubique* si pour tout entier  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $a_i a_{i+1} + 1$  est un cube parfait. Montrer que les permutations cubiques n'existent pas (c'est à dire pour aucun  $n \geq 2$  on ne peut trouver une telle permutation).

**Exercice 3:** De combien de façon peut-on sélectionner deux sous-ensembles disjoints d'un ensemble à  $n$  éléments ? (la réunion des deux sous-ensembles n'est pas nécessairement tout l'ensemble)<sup>1</sup>

**Exercice 4:** Un carré  $ABCD$  est donné. Les points  $N$  et  $P$  sont choisis sur les segments  $AB$  et  $AD$  respectivement, tel que  $PN = NC$  (les longueurs). Un point  $Q$  est sélectionné sur le segment  $AN$  tel que  $\widehat{NCB} = \widehat{QPN}$ . Montrer que  $\widehat{BCQ} = \frac{1}{2} \widehat{PQA}$ .

<sup>1</sup>Essayez votre méthode. Sinon essayez celle-ci: penser à poser la fonction  $f(x) = 1$  si  $x \in A$ ,  $f(x) = 2$  si  $x \in B$ ,  $f(x) = 0$  sinon,  $A, B$  distincts. Compter les  $f$  en première étape.