Comité National Tunisien Pour les Olympiades Mathématiques

SOLUTIONS

Test National de Pré-Selection - 27 Mars 2021 - 9:00 – 12:30

Exercice 1: Etant donné un ensemble de réels non nuls $a_1, a_2, ..., a_n$, on suppose que la somme de leurs produits deux à deux est égale à 1 ($\sum_{i<j} a_i a_j = 1$). Montrer qu'il est possible d'éliminer un seul nombre (a_i) de la somme de sorte que la somme des nombres restants $(S - a_i)$ soit inférieure à $\sqrt{2}$.

Solutions: Posons $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.. De la condition $\sum_{i<k} a_i a_k = 1$, on tire

$$2 = a_1(S - a_1) + a_2(S - a_2) + \cdots + a_n(S - a_n)$$

Supposons que $S - a_k \geq \sqrt{2}$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$. Alors

$$2 \geq a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{2} + \cdots + a_n\sqrt{2} = \sqrt{2}S$$

donc que $\sqrt{2} \geq S$. Or, on a aussi $S > S - a_1 \geq \sqrt{2}$, ce qui est impossible.

Exercice 3: De combien de façon peut-on sélectionner deux sous-ensembles disjoints d'un ensemble à n éléments ? (la réunion des deux sous-ensembles n'est pas nécéssairement tout l'ensemble).

Solutions: On utilise l'indication. On pose la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 2, & \text{si } x \in B \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f est alors un mot de longueur n sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$. Le nombre de telles fonctions est 3^n. Il y'a 2^n mots sur l'alphabet $\{0, 2\}$ (qui correspond à A vide), 2^n sur $\{0, 1\}$ (B vide) et 1 mot n'ayant que des zéros. Le nombre de paires ordonnées disjointes est donc $3^n - 2^n - 2^n + 1$. Le nombre de paires non ordonnées est logiquement

$$\frac{3^n + 1}{2} - 2^n$$

On peut le vérifier pour $n = 4$ en faisant des petits dessins.

Exercice 2:
L'écriture des nombres $1, 2, \ldots, n$ dans un ordre donné est appelée permutation de $(1, \ldots, n)$. Par exemple, $(2, 5, 3, 1, 4)$ est une permutation de $(1, 2, 3, 4, 5)$.

(a) Une permutation est dites *carrée* si pour tout entier $1 \leq i \leq n-1$, $a_i a_{i+1} + 1$ est un carré parfait. Montrer que pour un choix infini d'entiers n, il existe une permutation carrée de $(1, 2, \ldots, n)$ (Donner une construction).

(b) Une permutation est dites *cubique* si pour tout entier $1 \leq i \leq n-1$, $a_i a_{i+1} + 1$ est un cube parfait. Montrer que les permutations cubiques n'existent pas (c'est à dire pour aucun $n \geq 2$ on ne peut trouver une telle permutation).

Solutions: (a) Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_{2k})$ une permutation de $n = 2k$. Posons $a_1 = 2, a_2 = 4, \ldots, a_k = 2k, a_{k+1} = 1, a_{k+2} = 3, \ldots, a_{2k} = 2k-1$. On vérifie immédiatement que $a_i a_{i+1} + 1 = 4i(i+1) + 1 = (2i+1)^2$ pour $i \leq k-1$. De même pour $i > k$. Pour $i = k$, on a $a_i a_{i+1} + 1 = 2k + 1$ et ceci est un carré parfait pour un choix infini de k.

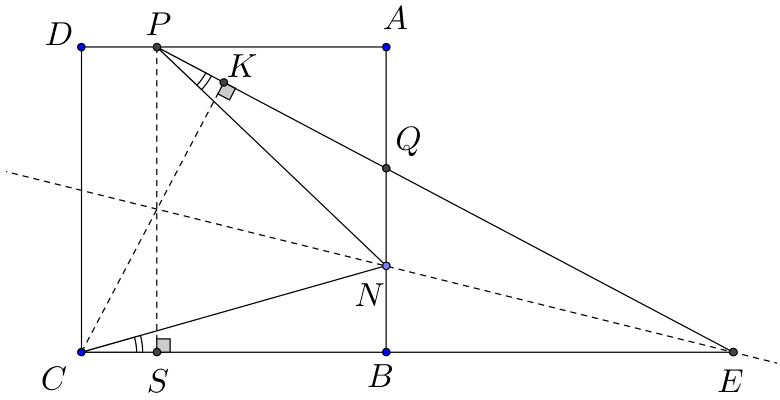
(b) Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_{2k})$ une permutation "cubique". Soit 2^k la plus grande puissance de 2 inférieure où égale à n. Par définition de la permutation cubique, il existe u tel que $2^k u + 1 = x^3$. On a donc que $2^k u = (x-1)(x^2 + x + 1)$, et que donc $2^k | x - 1$. Par construction de k, $n < 2^{k+1}$. D'autre part, comme $2^k u$ est de la forme $a_i a_j$, alors $2^k u < n^2$ et donc $x^3 < n^2$. On met tout ensemble :

$$2^k \leq x - 1 \leq n^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{2}{3}(k+1)}$$

ce qui est impossible (contradiction).

Exercice 4: Un carré $ABCD$ est donné. Les points N et P sont choisis sur les segments AB et AD respectivement, tel que $PN = NC$ (les longueurs). Un point Q est selectionné sur le segment AN tel que $\widehat{NCB} = \widehat{QPN}$. Montrer que $\widehat{BCQ} = \frac{1}{2}\widehat{PQA}$.

Solutions:



Soit E le point d'intersection de PQ et BC. D'après les hypothèses, $PN = NC$ et $\widehat{NPC} = \widehat{PCN}$. D'autre part, on sait que $\widehat{QPN} = \widehat{NCB}$. De ceci on tire que EPC est un triangle isocèle. Les altitudes PS et CK sont de longueurs égales. D'ou

$$CK = PS = AB = BC$$

et donc les deux triangles droits QBC et QKC sont similaires. Par conséquent QC est une bissectrice des angles $\widehat{KCB}$ et $\widehat{KQB}$. On a donc $\widehat{BCQ} = \frac{1}{2}\widehat{KCB}$.

Finalement, puisque $\widehat{QBC} + \widehat{QKC} = \pi$, on a que les points Q, B, C, K sont cocycliques ce qui donne que $\widehat{BCK} = \widehat{AQP}$. En combinant avec l'égalité de la fin du premier paragraphe, on trouve le résultat.