Comité National des Olympiades de Tunisie

.

Test Blanc National, 13 Mars 2021

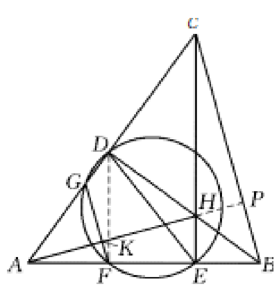
- Durée : 4h30
- Essayez d'être le plus clair possible dans vos réponses et méthodes.

Exercice 1: On rappelle une définition: une *remise* de 10% veut dire qu'un article qui se vend à 100 DT se vend après remise à 90 DT.
Un commerçant effectue trois remises successives sur un article qui coutait 300 DT, et qu'il vend alors à $222,87$ DT.
Quels sont les pourcentage (nombres entiers) des 3 remises?

Exercice 2: Pour l'anniversaire de LEILA, un certain nombre de COUPLES ainsi que LEILA (la seule enfant) sont réunis autour d'une table ronde.
Il n'y a donc que LEILA et un certain nombre de COUPLES autour de la table.
Lorsqu'on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, on peut compter:
- **6** personnes entre LEILA et ALI
- **12** personnes entre ALI et SLIM
- **9** personnes entre SLIM et MANEL
- **3** personnes MANEL et LEILA.

Combien y'a t-il de personnes en tout?

Exercice 3: Dans un triangle aigu (ABC), le point H est le point d'intersection de la hauteur CE avec la hauteur BD (voir figure). Un cercle de diamètre DE intersecte AB et AC aux points F et G respectivement. La droite FG coupe la droite AH au point K. Si $|BC| = 25$, $|BD| = 20$ et $|BE| = 7$, trouvez la longueur $|AK|$.



Exercice 4: Soient $n+1$ nombres entiers distincts strictement positifs, le plus grand étant inférieur ou égal à $2n$.
Démontrer qu'il en existe au moins deux tels que l'un soit multiple de l'autre.

Solutions

Exercice 1:
Ce problème demande un traitement adéquat des pourcentages.
Si a, b, c sont les trois pourcentages des remises (a, b, c sont troies entiers inférieurs à 100), ils vérifient

$$300\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)\left(1-\frac{c}{100}\right)=222,87$$

c'est-à dire : $(100-a)9100-b)(100-c)=742900$.
742900 se décompose ainsi : $742900=2^2\times 5^2\times 17\times 19\times 23$.
La seule façon de décomposer 742900 en produit de trois entiers inférieurs à 100 est

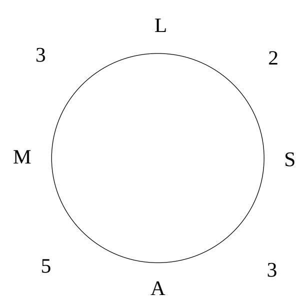
$$742900=(2^2\times 23)(5\times 17)(5\times 19)=92\times 85\times 95$$

Ainsi les trois entiers $100-a, 100-b, 100-c$ valent dans un ordre indifférent $85, 92$ et 95. Les montants des trois remises sont donc 15% , 8% , 5%.

Exercice 2:
La rigueur du raisonnement est aussi importante que la réponse exacte.
On va de Leila vers Leila en comptant en tout

$$6+1+12+1+9+1+3+1=34 \text{ personnes}$$

Comme on revient a Leila, on a du faire un nombre entier de tours.
Donc le nombre n de convives est **un diviseur de** 34.
De plus, il est clair que n est impair et supérieur ou égal à 5.
La seule possibilité est $n=17$.
Il reste alors à montrer qu'il existe une disposition des 17 convives correspondant aux données de l'énoncé. Voici la disposition qui convient.



Exercice 3:
On note par (A, B, C) le triangle de sommets A, B et C, et par $\widehat{ABC}$ l'angle en B.
Comme $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^o$, alors $(A, D, B) \sim (A, E, C)$, et

(1) $$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

Mais $BC = 25$, $BD = 20$ et $BE = 7$, d'ou $CD = 15$ et $CE = 24$.
De l'équation (1), on tire

$$\frac{AD}{AE} = \frac{5}{6} = \frac{AE + 7}{AD + 15}$$

et donc que $AD = 15$ et $AE = 18$.
On voit alors que D est le milieu de l'hypothenuse AC et que

$$DE = \frac{1}{2}AC = 15$$

Traçons la droite (DF). Puisque le point F est sur le cercle de diamètre DE, $\widehat{DFE} = 90^o$. On a alors

$$AF = \frac{1}{2}AE = 9$$

Puisque les quatre points G, F, E, D sont cocycliques, ainsi que les quatre points D, E, B, C, on a egalement que

$$\widehat{AFG} = \widehat{ADE} = \widehat{ABC}$$

Ceci donne donc que $(GF)//(CB)$.
La droite (AH) intersecte le segment BC au point P, et donc

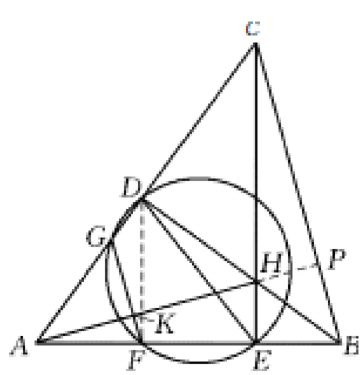
(2) $$\frac{AK}{AP} = \frac{AF}{AB}$$

Puisque H est l'orthencentre du triangle (A, B, C), $AP \perp BC$. De l'egalite $BA = BC$, on tire que

$$AP = CE = 24$$

Au final, l'equation (2) donne

$$AK = \frac{AF \cdot AP}{AB} = \frac{9 \times 24}{25}$$



Exercice 4:
Deux approches/solutions différentes.
Méthode I: Récurrence.
(a) La propriété est vraie pour $n = 1$.
(b) Suppos donc que, n étant un nombre entier supérieur ≥ 1, quelle que soit la façon de choisir $n+1$ entiers entre 1 et $2n$, parmi ces $n+1$ entiers, il y'en a toujours au moins deux dont l'un est multiple de l'autre.
Prenons alors $n+2$ nombres entiers dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n+2\}$, et démontrons que parmi ces $n+2$ nombres, il y'en a nécessairement deux dont l'un est multiple de l'autre.
1ere possibilité : parmi les $n+2$ entiers choisis entre 1 et $2n+2$, on en a pris $n+1$ au moins dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Alors, à cause de l'hypothèse de récurrence, il y'en a au moins un qui est multiple d'un autre.
2ème possibilité : parmi les $n+2$ entiers choisis entre 1 et $2n+2$, on en a pris seulement n dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, et donc il a fallu prendre aussi les deux nombres $2n+1$ et $2n+2$.
À nouveau deux cas se présentent:

- Premier cas: par les n nombres pris entre 1 et $2n$, il y'en a un qui est multiple d'un ature, et nous n'avons pas besoin d'aller plus loin... Passons donc au
- Deuxième cas: parmi les n nombres pris entre 1 et $2n$, il n'y en a aucun qui soit multiple d'un autre. Comme $2n+1$ est imapir et puet donc être éventuellement premier, intéressons nous a $2n+2 = 2(n+1)$ et démontrons que ce nombre est nécessairement multiple d'un des des n entiers choisis entre 1 et $2n$.
  Soit S cet ensemble d'entiers choisis entre 1 et $2n$. Nous avons l'alternative suivante
  - ou bien, parmi ces n entiers choisis dans S il y'a l'entier $n+2$, et alors c'est bon
  - ou bien ce n'est pas le cas, et $n+1$ n'est pas dans S.
    On est donc dans le cas (rappel) ou on a n entiers choisis de 1 à $2n$, en excluant $n+1$, et parmi ces n nombres, aucun n'est multiple d'un autre.
    A ce stade il faut montrer que $2(n+1)$ est multiple d'un de ces n nombres.

Pour résoudre ce dernier cas, rajoutons à S le nombre $n+1$. Par récurrence, forcément un de ces $n+1$ nombres est multiple d'un autre. Ceci veut dire que SOIT il y'a un multiple de $n+1$ dans S, SOIT c'est $n+1$ qui est mutiple d'un entier dans S. Le premier cas est impossible puisque le plus petit multiple de $n+1$ est $2(n+1) > 2n$.

Méthode 2: Il est important de comprendre cette démonstration. Elle est de style plus "moderne" et introduit des idées nouvelles.

Une *partition ensembliste* de $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ est la donnée d'un ensemble de sous-ensembles qui dont deux à deux disjoints et dont l'union est Ω. Par exemple, une partition de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ est

$$\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}$$

En utilisant les partitions, nous allons démontrer qu'étant donné donc $n+1$ nombres entiers distincts entre 1 et $2n$, il en existe deux x, y tel que $x = 2^k y$ avec $k \neq 0$. Non seulement ils sont multiples l'un de l'autre, mais pas un facteur de 2.
Soit $\Omega = \{1, 2, \ldots, 2n\}$. On définit sur Ω une classe d'équivalence $\sim$ qui dit que $x \sim y$ si et seulement si $x = 2^k y$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On vous laisse vérifier que c'est bien une relation d'équivalence.
Les classes d'équivalence forment une partition de Ω. On rappelle que x, y sont dans la même classe signifie (par définition) que $x = 2^k y$ pour un certain $k \neq 0$. Ceci en fait montre automatiquement que x, y ne peuvent pas etre tous les deux impairs, et donc il y'a au moins autant de classes d'equivalence dans Ω que de nombres impairs. On vous laisse verifier (facile) qu'obligatoirement il y'a **exactement** n classes d'équivalence.
La solution au problème de départ devient immédiate: si on prend $n+1$ nombres dans Ω, alors nécessairement deux d'entre eux seront dans la même classe, et donc par définition ils seront multiples (par une puissance de 2) l'un de l'autre.