



Test Blanc National du 06 Mars 2021: Solutions

- ESSAYEZ DE RÉSOUDRE ENTRE 3H ET 4H D’AFFILÉE
- ESSAYEZ D’ÊTRE LE PLUS CLAIR POSSIBLE DANS VOS RÉPONSES ET MÉTHODES.

Exercice 1: Un escalator (escalier roulant dans un magasin) fonctionne en montant. Wissem monte 20 marches et atteint le haut en 15 secondes. Alia monte 22 marches et atteint le haut en 12 secondes. Mohamed prenant l’escalier à contresens le descend en 18 secondes.

Si à chaque fois les marches sont parcourues une à une à la même vitesse, en montant ou en descendant, combien Mohamed a-t-il descendu de marches?

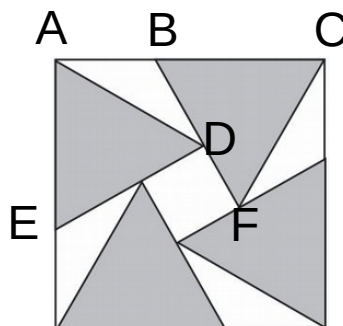
Exercice 2: Mounira a reçu pour son anniversaire un livre de 225 pages qui compte trois chapitres. La somme des chiffres des numéros des deux premières pages du deuxième chapitre est égale à 18. Par un curieux hasard, la somme des chiffres des numéros des deux dernières pages de ce même deuxième chapitre (qui compte plus de 2 pages) est aussi égale à 18.

Quel est le nombre des pages du deuxième chapitre de ce livre?

Exercice 3: On dispose sur un cercle les nombres de 1 à 10^6 de façon quelconque. Démontrer qu’il y’a nécessairement **1984** nombres consécutifs sur le cercle dont la somme est supérieure ou égale à $992(10^6 + 1)$.

Exercice 4: Ali a calé quatre triangles équilatéraux identiques dans une boîte carrée de côté 20 cm. Quelle est l’aire du petit carré central ?

Un Exo supplémentaire est inclus en fin de document, avec solution.



Solutions

Exo1: En comparant Wissem et Alia, on voit que Wissem a mis 3 secondes de plus pour gravir 2 marches de plus. On en déduit que l'escalier avale 2 marches en 3 secondes.

Il a donc avalé $12 \times \frac{2}{3} = 8$ marches pendant la montée de Alia.

L'escalier comprend donc $22 + 8 = 30$ marches visibles.

Pendant les 18 secondes de sa descente, Mohamed a descendu les 30 marches plus les $18 \times \frac{2}{3} = 12$ marche avalées par l'escalier pendant le même temps.

Conclusion: Mohamed descend 42 marches.

Exo3: On peut constituer 10^6 sommes de 1984 nombres consécutifs sur le cercle, car on peut commencer n'importe où. Appelons ces sommes $S_1, S_2, \dots, S_{10^6}$.

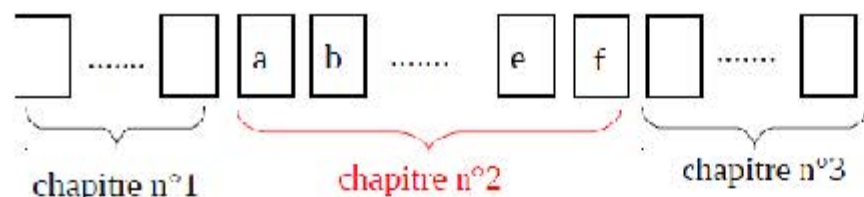
Chaque entier de 1 à 10^6 figure dans 1984 sommes S_i (c'est à dire on retrouve le même entier dans 1984 sommes possibles, en première, puis seconde, ..., puis 1984ème position).

Ça veut dire que la somme de tous les S_i vaut

$$1984 \times (1 + 2 + \dots + 10^6) = 1984 \times \frac{10^6 + 1}{2} \times 10^6$$

et la moyenne des S_i vaut $M = 1984 \frac{10^6+1}{2} = 992(1 + 10^6)$.

Quel est le nombre des pages du 2^e chapitre de ce livre ?



Soient a et b les numéros des deux premières pages du 2^{ème} chapitre du livre

Soient e et f les numéros des deux dernières pages du 2^{ème} chapitre du livre

Ces nombres sont tous plus petits que 225.

Comme les numéros des pages se suivent : $b = a + 1$ et de même $f = e + 1$

La page $n^{\circ}a$ peut s'écrire avec 1, 2 ou 3 chiffres

Si on note u le nombre d'unités, d le nombre de dizaines et c le nombre de centaines, on peut écrire

$$a = 100c + 10d + u$$

$$b = 100c + 10d + (u + 1)$$

Par ailleurs, on notera $S(a,b)$ la somme des chiffres qui composent l'écriture de a et de b

Cas n°1 a s'écrit avec 1 seul chiffre ($a < 10$)

- si $a = 9$ alors la page suivante $b = 10$ et $a + b = 9 + 10 = 19 \neq 18 \rightarrow$ impossible

- si $a < 9$ alors $a = u$ et $b = u + 1$ (sans retenue car $b < 10$)

Donc $S(a,b) = 2u + 1$ qui est impair donc $\neq 18$ qui est pair \rightarrow impossible

Cas n°2 a s'écrit avec 2 chiffres ($9 < a < 99$)

- si $a = 99$ alors $b = 100$ et $S(a,b) = 9 + 9 + 1 + 0 + 0 = 19 \neq 18 \rightarrow$ impossible

- si $a < 99$

$$a = 10d + u$$

$$b = 10d + (u + 1)$$

* si $u = 9$ alors $a = 10d + 9$ et $b = 10(d + 1) + 0$ (à cause de la retenue)

$$\text{Donc } S(a,b) = d + 9 + d + 1 + 0 = 2d + 10$$

$$\text{On en déduit que } d = 4 \text{ (car } 10 + 2 \cdot 4 = 18)$$

Conclusion $d = 4$ et $u = 9$ d'où $a = 49$ et $b = 50$

* si $u \neq 9$ alors $a = 10d + u$ et $b = 10d + (u + 1)$

$$S(a,b) = d + u + d + u + 1$$

$$= 2(d + u) + 1 \text{ impair } \neq 18 \rightarrow \text{impossible}$$

Cas n°3 a s'écrit avec 3 chiffres ($99 < a < 225$)

* si $u = 9$ $a = 100c + 10d + 9$

$$b = 100c + 10(d + 1) + 0 \quad (d < 3 \text{ car } n^{\circ} \text{ page } < 225, \text{ donc } d + 1 \text{ sans retenue})$$

$$\text{Donc } S(a,b) = c + d + 9 + c + d + 1 = 2(c + d) + 10 = 18$$

On en déduit que $2(c + d) = 18 - 10 = 8$ et finalement que $c + d = 4$

Conclusion

ou $c = 0$ et $d = 4 \rightarrow$ impossible car on retombe sur un nombre a avec 2 chiffres

ou $c = 1$ et $d = 3 \rightarrow a = 139$ et $b = 140$

ou $c = 2$ et $d = 2 \rightarrow$ impossible car sinon $a = 229$ et $b = 230$ qui sont > 225

ou $c = 3$ et $d = 1 \rightarrow$ impossible car le nombre de pages < 225 (centaine < 3)

Le même raisonnement amène une étude des cas similaires pour les 2 dernières pages e et f du chapitre 2.

Mais comme e et f sont supérieurs à a et b , il ne reste qu'une seule possibilité :

1^{ère} page du chapitre n°2 : $a = 49$ dernière page du chapitre n°2 : $f = 140$

Nombre de pages du chapitre n°2 : $140 - 49 = 91$

donc page n°49 + 91 pages = pages n°140

Soit au total 92 pages (**et pas 91, piège !!**)

Le chapitre n°2 de ce livre contient 92 pages

Ex 17 Quatre triangles dans un carré.

Prouvons d'abord que les triangles blancs sont isocèles.

$$\widehat{ABD} = \widehat{ABC} - \widehat{FBC} = 180 - 60 = 120^\circ.$$

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAE} - \widehat{DAE} = 90 - 60 = 30^\circ.$$

$$\widehat{ADB} = 180 - \widehat{ABD} - \widehat{BAD} = 180 - 120 - 30 = 30^\circ.$$

Donc ABD est isocèle en B.

Posons x le côté des triangles équilatéraux.

$$AB = 20 - x. \quad BD = 20 - x. \quad AD = x.$$

Appliquons le théorème de Pythagore généralisée au triangle ABD :

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \times AB \times BD \times \cos(120^\circ).$$

$$x^2 = (20 - x)^2 + (20 - x)^2 - 2 \times (20 - x)^2 \times (-0,5).$$

$$x^2 = (20 - x)^2 \times (1 + 1 + 1).$$

$$x = (20 - x)\sqrt{3} = 20\sqrt{3} - x\sqrt{3}.$$

$$x(\sqrt{3} + 1) = 20\sqrt{3}.$$

$$x(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = 20\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1).$$

$$x(3 - 1) = 20 \times 3 - 20\sqrt{3}.$$

$$2x = 60 - 20\sqrt{3}.$$

$$x = 30 - 10\sqrt{3}.$$

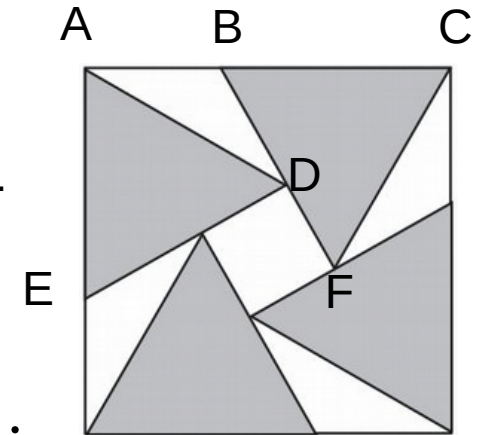
$$\text{Donc } DF = x - (20 - x) = 2x - 20 = 60 - 20\sqrt{3} - 20.$$

$$DF = 40 - 20\sqrt{3} = 20(2 - \sqrt{3}).$$

$$DF^2 = 400(4 + 3 - 2 \times 2\sqrt{3}) = 400(7 - 4\sqrt{3}).$$

$$DF^2 \approx 400(7 - 4 \times 1,732) \approx 400(7 - 6,928)$$

$$DF^2 \approx 400 \times 0,072 \approx 28,8 \text{ cm}^2.$$



La solution est **28,8 cm²**.

Exercice Supplémentaire: Le capitaine dit à son fils: “Mr Dupont a 2 filles. Le produit de leurs trois âges est 2450, et la somme de leurs trois âges est égale à 4 fois le tien. Peux tu trouver les âges des trois passagers ? ”

Le fils réfléchit et répond: ”Non, il me manque une donnée”.

Le capitaine rajoute: “je suis plus âgé que Mr. Dupont”.

Le fils, connaissant son âge et l’âge de son père, en déduit tout de suite les âges de Mr. Dupont et de ses deux filles.

Quel est l’âge du capitaine? de Mr. Dupont? de ses deux filles?

Solutions: Ecrire la décomposition en facteurs premiers: $2450 = 2 \times 5^2 \times 7^2$.

Les seules possibilités raisonnables des âges sont, compte tenu de ce que leur somme doit être un multiple de 4

âge des deux filles	âge Mr. Dupont	somme	age du fils
2 et 25	49	76	19
5 et 5	98	108	27
5 et 10	49	64	16
7 et 10	35	52	13
7 et 7	50	64	16

Comme le fils connaît son propre âge, donc la somme, il répond “il me manque une donnée”, c’est qu’il est dans la seule situation ambiguë: cell où la somme est 64, c’est à dire la seule correspondant à deux possibilités distinctes. Dans tout autre cas en effet, il aurait pu conclure.

Donc la somme est 64 et le fils a 16 ans.

Dans les deux cas possibles, M. Dupont a soit 49 ans ou 50 ans. Puisque le capitaine est plus âgé que M. Dupont, il a donc 50 ans ou plus. Mais si le capitaine avec un âge strictement plus grand que 50 ans, le renseignement “je suis plus âgé que M. Dupont” n’aurait pas permis au fils (qui connaît l’âge de son père) de trouver la réponse.

Donc le capitaine a 50 ans, M. Dupont 49 ans et les filles ont 5 et 10 ans.